

# Důkaz vzorce pro součet n členů aritm. posl.

Pro součet prvních  $n$  členů aritmetické posloupnosti platí tvrzení:



Nechť  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  je aritmetická posloupnost a  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  je součet jejích první  $n$  členů.

Pak platí:  $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

Důkaz povedeme matematickou indukcí.

## I. - důkaz pro $n=1$

Dokážeme platnost tvrzení pro nejnižší možné  $n$ .

Z předpokladů tvrzení výše máme, že:  $s_1 = a_1$ . Dosazením do dokazovaného vzorce

$$s_1 = \frac{1}{2}(a_1 + a_1) = a_1. \text{ Tvrzení pro } n=1 \text{ tedy platí.}$$

## II. - indukční krok

Nyní předpokládáme, že tvrzení (vzorec) je pravdivé pro  $n=k$ , kde  $k$  je libovolné přirozené číslo. Víme, že minimálně jedno takové existuje a sice  $k=1$  pro ostatní to zatím nevíme. Nyní dokážeme, že jestliže platí tvrzení pro  $k$ , pak platí také pro  $k+1$ . Jinak řečeno dokazujeme platnost vzorce pro  $k+1$  tak, že do něj aplikujeme vzorec pro  $k$  (který je z předpokladu správný), abychom dosáhli pravdivého tvrzení.

Předpoklad:  $s_k = \frac{k}{2}(a_1 + a_k)$  platí.

Dokazujeme, že platí  $s_{k+1} = \frac{k+1}{2}(a_1 + a_{k+1})$

Upravím si levou stranu, abych mohl aplikovat předpoklad:

$$s_k + a_{k+1} = \frac{k+1}{2}(a_1 + a_{k+1}).$$

$$\text{Aplikuji: } \frac{k}{2}(a_1 + a_k) + a_{k+1} = \frac{k+1}{2}(a_1 + a_{k+1})$$

$$\begin{aligned} &\text{Vynásobím 2 a roznásobím závorky: } ka_1 + ka_k + 2a_{k+1} \\ &= ka_1 + a_1 + ka_{k+1} + a_{k+1} \end{aligned}$$

Odečtu  $ka_1$  a přepíšu  $a_{k+1}$  jako  $a_k + d$ , protože jde o aritmetickou posloupnost.

$$ka_k + 2a_k + 2d = a_1 + ka_k + kd + a_k + d$$

$$\text{Odečtu, co lze: } a_k = a_1 + kd - d, \text{ tedy } a_k = a_1 + (k-1)d$$

Toto tvrzení je známý vzorec pro  $n$ -tý člen aritmetické posloupnosti, neboli je to pravdivé tvrzení. Tím

je důkaz dokončen.

## Shrnutí

Nejprve jsme dokázali, že pro  $n=1$  je tvrzení pravdivé. Pak jsme dokázali, že pokud je tvrzení platné pro nějaké  $k$ , musí být platné i pro  $k+1$ . Takovým nějakým  $k$  je třeba číslo 1, ale z toho tedy plyne, že to platí i pro 2. Jestliže platí pro 2, pak platí pro 3. Jestliže pro 3 platí, pak platí pro 4... Neboli platí pro jakékoliv  $n$ ...

From: <https://wiki.gml.cz/> - GMLWiki

Permanent link: <https://wiki.gml.cz/doku.php/matematika:posloupnosti:dukazsoutunclenu?rev=1448886991>

Last update: **30. 11. 2015, 13.36**

