

# Průsečík přímky a kružnice s CAS Maxima

## Zadání

Je dána kružnice  $k: (x-m)^2+(y-1)^2=16$  a přímka  $p: x-3y+6=0$ . Určete hodnotu parametru  $m$ , aby přímka  $p$  byla tečnou ke kružnici  $k$ .

## Teorie

Kružnice je zadána ve středovém tvaru, ze kterého pohodlně přečteme souřadnice středu  $[m;1]$  a poloměr přímky  $r = 4$ . Střed má tedy neznámou  $x$ -souřadnici (je dána parametrem  $m$ ). Přímka je zadána obecnou rovnicí.

Abychom našli  $m$  ( $x$ -souřadnici středu), budeme hledat průsečíky  $k$  a  $p$  tak, aby existoval právě jeden (tzn. přímka s kružnicí mají jeden společný bod, je to tečna). Řešíme proto soustavu rovnic přímky a kružnice a hledáme společný bod  $[x;y]$ .

Není nutné celou soustavu dořešit, stačí si uvědomit, že chceme, aby měla právě jedno řešení, proto ve chvíli, kdy dostáváme kvadratickou rovnici, stačí vzít její diskriminant a položit ho roven nule (je-li diskriminant nula, vyjde právě 1 řešení). Dořešíme jen rovnici s diskriminantem a dostáváme hodnoty parametru  $m$ .

## Řešení

Spusťte program wxMaxima a začněte psát (i když nikde neblíká kurzor, to nevadí) nebo pište do okna [online verze](#). Pokud používáte program wxMaxima, musíte za každým příkazem stisknout **Shift+Enter**, aby se vykonal!

Příkaz wxMaxima	Vysvětlení	Postup
<code>k: (x-m)^2+(y-1)^2=16;</code>	Vkládáme rovnici kružnice a pojmenováváme ji $k$ .	Zadáváme rovnice do programu.
<code>p: x-3*y+6=0;</code>	Vkládáme rovnici přímky a pojmenováváme $p$ .	
<code>solve([k,p],[x,y]);</code>	Necháváme program vyřešit soustavu rovnic $k, p$ vzhledem k neznámým $x$ a $y$ , $m$ je tedy parametr. Všimneme si, že $x_1$ a $x_2$ , stejně jako $y_1$ a $y_2$ se liší přičtením či odečtením výrazu pod odmocninou (diskriminant), ten by tedy měl být 0. Zkusíme si nejprve vyřešit soustavu „ručně“ dosazovací metodou.	

Příkaz wxMaxima	Vysvětlení	Postup
<code>solve(p,y);</code>	Necháme „vyřešit“ přímku $p$ pro proměnnou $y$ s „parametrem“ $x$ neboli necháme vyjádřit z rovnice přímky $p$ neznámou $y$ vzhledem k $x$ .	Vyřešíme soustavu rovnic $k$ a $p$ dosazovací metodou, dosazením za $y$ z rovnice přímky.
<code>rhs(%[1]);</code>	Zobrazíme si jen pravou stranu rovnice, která nám vyšla, to dělá funkce <code>rhs()</code> . symboly <code>%[1]</code> říkají, že z předchozího výsledku, kterým byl (jednoprvkový) seznam (má hranaté závorky) bereme hned první (a zde jedinou) položku.	
<code>subst(%,y,k);</code>	Substituujeme (dosazujeme) do rovnice $k$ místo neznámé $y$ hodnotu předchozího výsledku (znak <code>%</code> ). Pokud něco nefunguje, můžeme rovnou místo znaku <code>%</code> napsat $(x+6)/3$ .	
<code>expand(%)</code> ;	Roznásobíme předchozí rovnici.	
<code>%-16</code>	Od předchozího výsledku odečteme 16, abychom dostali na levé straně kvadratický trojčlen a na pravé straně rovnice nulu.	Máme kvadratickou rovnici pro $x$ vzhledem k $m$ . Jelikož ale nepotřebujeme znát hodnotu $x$ , ale pouze zajistit, aby mělo jediné řešení, budeme dále určovat diskriminant kvadratické rovnice tak, aby byl roven 0.
<code>lhs(%)</code> ;	Zobrazíme si jen levou stranu rovnice, tj. pouze kvadr. trojčlen.	
<code>ratcoef(%,x,2);</code>	Z předchozího výsledku (znak <code>%</code> ) si zobrazíme koeficient pro $x$ v 2. mocnině.	
<code>let(a,%o10);</code>	Nastavíme program, že má písmeno $a$ později substituovat hodnotou výsledku na řádku 10 (znaky <code>%o10</code> ), tj. předchozí výsledek. Pozor, nelze použít znak <code>%</code> , výraz se bude vyhodnocovat až ve chvíli samotného substituování!	
<code>ratcoef(%o9,x,1);</code>	Z výsledku na řádku 9 (znak <code>%o9</code> , řádek s kvadratickým trojčlenem) si zobrazíme koeficient pro $x$ v 1. mocnině.	
<code>let(b,%o12);</code>	Nastavíme program, že má písmeno $b$ později substituovat hodnotou výsledku na předchozím řádku ( <code>%o12</code> ).	
<code>ratcoef(%o9,x,0);</code>	Z výsledku na řádku 9 si zobrazíme koeficient pro absolutní člen ( $x$ v 0. mocnině)-	
<code>let(c,%o14);</code>	Nastavíme program, že má písmeno $c$ později substituovat hodnotou výsledku na předchozím řádku ( <code>%o14</code> ).	
<code>letsimp(b^2-4*a*c);</code>	Necháme vypsát vzorec pro diskriminant, funkce <code>letsimp</code> do něj dosadí za neznámé $a$ , $b$ a $c$ dříve nastavené hodnoty.	
<code>%=0;</code>	V předchozím řádku určený diskriminant položíme roven nule.	Máme rovnici diskriminantu rovnu nule, hledáme pro jaká $m$ bude nula a tudíž vyjde jediný průsečík přímky s kružnicí.

Příkaz wxMaxima	Vysvětlení	Postup
<code>solve(%) ;</code>	Necháme vyřešit rovnici v předchozím řádku.	Program našel 2 možné hodnoty parametru $m$ . máme řešení.

Bude-li  $m = \pm 4 \sqrt{10} - 3$ , bude se kružnice dotýkat přímky.

Můžeme ještě spočítat souřadnice tečného bodu:

Příkaz wxMaxima	Vysvětlení	Postup
<code>rhs(%[1]) ;</code>	příkaz <code>rhs</code> vybere jen pravou stranu rovnice, <code>%[1]</code> říká první část ze seznamu posledního výsledku.	Zobrazíme hodnotu $m_1$ .
<code>subst(%, m, k) ;</code>	Substituujeme (dosadíme) předchozí výsledek za parametr $m$ do rovnice kružnice.	Dosadíme za parametr do kružnice.
<code>solve([%, p], [x, y]) ;</code>	Vyřešíme soustavu rovnic, první je předchozí výsledek (kružnice s dosazeným parametrem), druhá je přímka, hledáme neznámé $x$ a $y$ .	Hledáme průsečík kružnice a přímky pro první hodnotu parametru $m$ .
<code>rhs(%o18[2]) ; subst(%, m, k) ; solve([%, p], [x, y]) ;</code>	Výsledek pro druhou hodnotu parametru $m_2$ dostaneme analogicky, nejprve zobrazujeme druhou hodnotu (jen pravou stranu) z výsledku na řádku 18.	Dopočítáme tečný bod pro druhou hodnotu parametru.

Celý výpočet pro program wxMaxima si můžete [stáhnout](#). Otevřete nové okno a po načtení klikněte v menu na „Cell“ → „Evaluate All Cells“. Nezapomeňte, že při opakovaném provedení příkazu (stisku Shift+Enter) znamená znak % v příkazu vždy výsledek naposledy provedeného výpočtu, nikoliv předchozího řádku. Při opakovaném provedení se také mění čísla řádků, takže nemusí odpovídat správně očíslování např %o18.

Exportovanou podobu v HTML najdete na [stránkách prof. Rýdla](#).

From:  
<http://wiki.gml.cz/> - GMLWiki

Permanent link:  
<http://wiki.gml.cz/matematika:software:maxima:prusecikprimkyakruznice>

Last update: **18. 09. 2015, 13.04**

