Důkaz vzorce pro součet n členů aritm. posl.

Pro součet prvních *n* členů aritmetické posloupnosti platí tvrzení:

> Nechť $(a_n)^{\infty}_{n=1}$ je aritmetická posloupnost a $s_n = a_1+a_2+\dots+a_n$ je součet jejích první *n* členů.
>
> Pak platí: $s_n = \frac{n}{2} (a_1+a_n)$

Důkaz povedeme matematickou indukcí.

I. – důkaz pro *n*=1

Dokážeme platnost tvrzení pro nejnižší možné *n*.

Z předpokladů tvrzení výše máme, že: $s_1=a_1$. Dosazením do dokazovaného vzorce $s_1=\frac{1}{2}(a_1+a_1)=a_1$. Tvrzení pro *n=1* tedy platí.

II. – indukční krok

Nyní předpokládáme, že tvrzení (vzorec) je pravdivé pro *n*=*k*, kde *k* je libovolné přirozené číslo. Víme, že minimálně jedno takové existuje a sice *k*=1 pro ostatní to zatím nevíme. Nyní dokážeme, že jestliže platí tvrzení pro *k*, pak platí také pro *k+1*. Jinak řečeno dokazujeme platnost vzorce pro *k+1* tak, že do něj aplikujeme vzorec pro *k* (který je z předpokladu správný), abychom dosáhli pravdivého tvrzení.

Předpoklad: $s_k = \frac{k}{2} (a_1+a_k)$ platí.

Dokazujeme, že platí $s_{k+1} = \frac{k+1}{2} (a_1+a_{k+1})$

Upravím si levou stranu, abych mohl aplikovat předpoklad: $s_k + a_{k+1} = \frac{k+1}{2} (a_1+a_{k+1})$.

Aplikuji: $\frac{k}{2} (a_1+a_k) +a_{k+1} = \frac{k+1}{2} (a_1+a_{k+1})$

Vynásobím 2 a roznásobím závorky: $ka_1+ka_k+2a_{k+1}=ka_1+a_1+ka_{k+1}+a_{k+1}$

Odečtu *k* a_1 a přepíšu a_{k+1} jako a_k+d, protože jde o aritmetickou posloupnost. $ka_k+2a_k+2d=a_1+ka_k+kd+a_k+d$

Odečtu, co lze: $a_k=a_1+kd-d$, tedy $a_k=a_1+(k-1)d$

Toto tvrzení je známý vzorec pro n-tý člen aritmetické posloupnosti, neboli je to pravdivé tvrzení. Tím je důkaz dokončen.

Shrnutí

Nejprve jsme dokázali, že pro n=1 je tvrzení pravdivé. Pak jsme dokázali, že pokud je tvrzení platné pro nějaké k, musí být platné i pro k+1. Takovým nějakým k je třeba číslo 1, ale z toho tedy plzne, že to platí i pro 2. Jestliže platí pro 2, pak platí pro 3. Jestliže pro 3 platí, pak platí pro 4… Neboli platí pro jakékoliv n…