Společná tečna dvou kružnic

Zadání

Jsou dány dvě kružnice. Nalezněte všechny jejich společné tečny.

Náčrtek

Nakreslíme přímku, dále dvě kružnice, kterým je tato přímka tečnou. Doplníme spojnici středů a tím zakreslíme střed stejnolehlosti (průsečík tečny a spojnice středů). Můžeme doplnit i druhé řešení – od ruky načrtneme druhou tečnu.

Úvaha – řešení

Užijeme homotetie, ve které jedna kružnice přechází v druhou. V tomto zobrazení nalezneme společný tečný bod, který se zobrazuje z jedné kružnice na druhou. Je zřejmé, že tento tečný bod bude společný pro libovolný obraz kružnice (s libovolným koeficientem). Z toho plyne, že tato tečna prochází i středem homotetie (pokud by byl definicí stejnolehlosti povolen koeficient 0, pak by se s tímto koeficientem celá kružnice včetně tohoto bodu promítla právě do středu stejnolehlosti).

Střed stejnolehlosti leží s jistotou na spojnici středů kružnic, protože speciálně i středy se musí vzájemně zobrazit. Dále zvolíme libovolný bod na jedné kružnici a na druhé zvolíme bod pod stejným kladným i záporným úhlem vůči spojnici středů, což je dáno nutností zachovat koeficient stejnolehlosti, resp. rovnoběžnost. Kladný i záporný úhel volíme proto, že kružnice se mohou na sebe zobrazit podle dvou stejnolehlostí, s kladným a záporným koeficientem.

Tečnu ke kružnici z bodu (středu stejnolehlosti) nenajdeme od ruky přiložením pravítka, ale pomocí konstrukce thaletovy kružnice nad úsečkou danou středem stejnolehlosti a středem kružnice. Průsečík kružnice a thaletovy kružnice je tečný bod.

Postup

1. $k_1, k_2; k_1(S_1,r_1), k_2(S_2,r_2)$
2. $s; s = S_1S_2$
3. $X;X \in k_1$
4. $p;p||XS_1, S_2 \in p$
5. $X';X' \in k_2 \cap p$
6. $R;R \in XX' \cap s$
7. $Th; \text{Thaletova kružnice nad }S_1R$
8. $T;T \in Th \cap k_1$
9. $t;t=RT$

Rys

Přehrajte si dynamický rys v Geogebře... Pod rysem jsou tlačítka k ovládání jednotlivých kroků konstrukce a vysvětlená vazba mezi body v předešlé konstrukci.

Diskuse

Kružnice se zobrazují v homotetii podle neznámého středu a poměru. Mají-li mít společnou tečnu, musí být v této homotetii zobrazen i tečný bod z jedné kružnice na druhou. Zároveň společná tečna musí procházet středem homotetie.

Dvojice nesoustředných kružnic s různým poloměrem se vzájemně zobrazuje ve dvou stejnolehlostech (se záporným a kladným koeficientem. Zároveň vzhledem k vlastnostem kružnic, tečen a stejnolehlosti musí vzniknout vždy dvojice osově souměrných (podle spojnice středů) řešení pro jednu stejnolehlost. V tomto případě tedy **vzniknou 4 řešení**.

Dvojici nesoustředných kružnic se stejným poloměrem nelze zobrazit ve stejnolehlosti. Tečny jsou dvě rovnoběžky se spojnicí středů. Konstruujeme je jako rovnoběžky v bodech, kde se protne kolmice na spojnici středů s kružnicí. Vzniknou **2 řešení**.

Dvojice soustředných kružnic nemůže mít společnou tečnu, takže **neexistuje žádné řešení**.