

# Domácí úkol na skalární součin

## Příklad 1

### Zadání

Nalezněte vektor  $\vec{v}$  takový, aby svíral úhel  $30^\circ$  s vektorem  $\vec{u}=(3;5)$  a aby jeho délka byla  $\sqrt{8}$ .

### Řešení

Vektor  $\vec{v}$  bude mít souřadnice  $(v_1;v_2)$ . Jsou na něj kladeny dvě podmínky, které vyjádříme v podobě rovnic:

Úhel vektorů určíme pomocí rovnice  $\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos \alpha$ . Skalární součin  $\vec{v} \cdot \vec{u}$  spočítáme jako obvykle sečtením součinů složek vektorů. Druhá podmínka je na délku vektorů, čili z rovnice pro výpočet délky vektoru dáme do vztahu jeho složky s požadovanou délkou.

- $3v_1 + 5v_2 = \sqrt{34} \sqrt{8} \cdot \cos 30^\circ$
- $\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{8}$

Upravíme první rovnici, vyjádříme  $v_1$ :

$$3v_1 + 5v_2 = 4\sqrt{17} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3v_1 + 5v_2 = 2\sqrt{51}$$

$$v_1 = \frac{2\sqrt{51} - 5v_2}{3}$$

Upravíme druhou rovnici (umocnění je v pořádku, víme že pod odmocninou jsou vždy nezáporná čísla, netřeba psát absolutní hodnotu).

$$v_1^2 + v_2^2 = 8$$

Využijeme dosazovací metodu (máme zde druhé mocniny, bude nejpoužitelnější), do druhé rovnice dosadíme  $v_1$  z první:

$$\left( \frac{2\sqrt{51} - 5v_2}{3} \right)^2 + v_2^2 = 8$$

$$\frac{4 \cdot 51 - 20\sqrt{51}v_2 + 25v_2^2}{9} + v_2^2 = 8$$

$$17v_2^2 - 10\sqrt{51}v_2 + 66 = 0$$

$$v_2' = \frac{5\sqrt{3} + 3}{\sqrt{17}}, \quad v_2'' = \frac{5\sqrt{3} - 3}{\sqrt{17}}$$

Dosazením obou řešení pro  $v_2$  do vyjádření  $v_1$  z první rovnice získáme i  $v_1$ :

$$v_1 = \frac{2\sqrt{51} - 5 \sqrt[3]{17}}{\sqrt{17} + 15 - 25\sqrt{3}}$$

$$v_1' = \frac{2\sqrt{51}\sqrt{17} - 15 - 25\sqrt{3}}{3\sqrt{17}},$$

$$v_1'' = \frac{2\sqrt{51}\sqrt{17} + 15 - 25\sqrt{3}}{3\sqrt{17}}$$

Zapišeme řešení:

$$\boxed{\vec{v} \in \left[ \left[ \frac{2\sqrt{51}\sqrt{17} - 15 - 25\sqrt{3}}{3\sqrt{17}}; \frac{5\sqrt{3} + 3}{\sqrt{17}} \right], \left[ \frac{2\sqrt{51}\sqrt{17} + 15 - 25\sqrt{3}}{3\sqrt{17}}; \frac{5\sqrt{3} - 3}{\sqrt{17}} \right] \right]}$$

Zaokrouhleně:

$$\vec{v} \in \left[ [0,05; 2,83], [2,47; 1,37] \right]$$

## Příklad 2

### Zadání

Určete úhel svíraný vektory  $\vec{u} = (2; 1)$ ,  $\vec{v} = (5; 7)$

### Řešení

Příklad je nejjednodušší typ příkladu na skalární součin. Z rovnice

$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos \alpha$  vyjádříme úhel:

$$\alpha = \arccos \left( \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \right)$$

neboli

$$\alpha = \arccos \left( \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \right)$$

Dosadíme souřadnice vektorů a dostáváme:

$$\alpha = \arccos \left( \frac{17}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{74}} \right)$$

Po správném dosazení do kalkulačky (je třeba mít zapnutý režim stupňů DEG) dostáváme zaokrouhleně:

$$\boxed{\alpha = 27^\circ 54'}$$

From:

<http://wiki.gml.cz/> - **GMLWiki**

Permanent link:

<http://wiki.gml.cz/matematika:analytgeom:ukol1?rev=1430906737>

Last update: **06. 05. 2015, 12.05**

