Domácí úkol na skalární součin

Příklad 1

Zadání

Nalezněte vekto $\vec{v}$ takový, aby svíral úhel 30° s vektorem $\vec{v}=(3;5)$ a aby jeho délka byla $\sqrt{8}$.

Řešení

Vektor $\vec{v}$ bude mít souřadnice $(v_1;v_2)$. Jsou na něj kladeny dvě podmínky, které vyjádříme v podobě rovnic:

Úhel vektorů určujeme pomocí rovnice $\vec{v}\cdot\vec{u}=|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\cdot cos\alpha$. Skalární součin $\vec{v}\cdot\vec{u}$ spočítáme jako obvykle sečtením součinů složek vektorů. Druhá podmínka je na délku vektorů, čili z rovnice pro výpočet délky vektoru dáme do vztahu jeho složky s požadovanou délkou.

1. $3v_1+5v_2 = \sqrt{34}\sqrt{8}\cdot\cos 30^\circ$
2. $\sqrt{v_1^2+v_2^2} = \sqrt{8}$

Upravíme první rovnici, vyjádříme v_1:

$3v_1+5v_2=\sqrt{17}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$3v_1+5v_2=2\sqrt{51}$

$v_1=\frac{2\sqrt{51}-5v_2}{3}$

Upravíme druhou rovnici (umocnění je v pořádku, víme že pod odmocninou jsou vždy nezáporná čísla, netřeba psát absolutní hodnotu).

$v_1^2+v_2^2=8$

Využijeme dosazovací metodu (máme zde druhé mocniny, bude nejpoužitelnější), do druhé rovnice dosadíme v_1 z první:

$\left(\frac{2\sqrt{51}-5v_2}{3} \right)^2 + v_2^2=8$

$\frac{4\cdot 51 -20 \sqrt{51}v_2+25v_2^2}{9} + v_2^2=8$

$17v_2^2 - 10\sqrt{51}v_2+66=0$

$v_2'=\frac{5\sqrt{3}+3}{\sqrt{17}}, v_2'=\frac{5\sqrt{3}-3}{\sqrt{17}}$

Dosazením obou řešení pro v_2 do vyjádření v_1 z první rovnice získáme i v_1:

$v_1=\frac{2\sqrt{51}-5 \left(\frac{5\sqrt{3} \pm 3}{\sqrt{17}} \right)}{3}$

$v_1'=\frac{2\sqrt{51}\sqrt{17}-15-25\sqrt{3}}{3\sqrt{17}}, v_2'=\frac{2\sqrt{51}\sqrt{17}+15-25\sqrt{3}}{3\sqrt{17}}$

Zapíšeme řešení:

$\boxed{\vec{v} \in \left\{ [\frac{2\sqrt{51}\sqrt{17}-15-25\sqrt{3}}{3\sqrt{17}};\frac{5\sqrt{3}+3}{\sqrt{17}}], [\frac{2\sqrt{51}\sqrt{17}+15-25\sqrt{3}}{3\sqrt{17}};\frac{5\sqrt{3}-3}{\sqrt{17}}]\right\}}$

Zaokrouhleně:

$\vec{v} \in \left\{ [0,05;2,83], [2,47;1,37]\right\}$

Příklad 2

Zadání

Určete úhel svíraný vektory $\vec{u}=(2;1), \vec{u}=(5;7)$

Řešení

Příklad je nejjednodušší typ příkladu na skalární součin. Z rovnice $\vec{v}\cdot\vec{u}=|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\cdot cos\alpha$ vyjádříme úhel:

$\alpha = arccos \left (\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} \right)$

neboli

$\alpha = arccos \left (\frac{u_1v_1+u_2v_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2}} \right)$

Dosadíme souřadnice vektorů a dostáváme:

$\alpha = arccos \left (\frac{17}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{74}} \right)$

Po správném dosazení do kalkulačky (je třeba mít zapnutý režim stupňů DEG) dostáváme zaokrouhleně:

$\boxed{\alpha = 27^\circ 54'}$