

Domácí úkol na skalární součin

Příklad 1

Zadání

Nalezněte vektor \vec{v} takový, aby svíral úhel 30° s vektorem $\vec{v}=(3;5)$ a aby jeho délka byla $\sqrt{8}$.

Řešení

Vektor \vec{v} bude mít souřadnice $(v_1;v_2)$. Jsou na něj kladeny dvě podmínky, které vyjádříme v podobě rovnic:

Úhel vektorů určíme pomocí rovnice $\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos \alpha$. Skalární součin $\vec{v} \cdot \vec{u}$ spočítáme jako obvykle sečtením součinů složek vektorů. Druhá podmínka je na délku vektorů, čili z rovnice pro výpočet délky vektoru dáme do vztahu jeho složky s požadovanou délkou.

- $3v_1 + 5v_2 = \sqrt{34} \sqrt{8} \cdot \cos 30^\circ$
- $\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{8}$

Upravíme první rovnici, vyjádříme v_1 :

$$3v_1 + 5v_2 = \sqrt{17} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3v_1 + 5v_2 = 2\sqrt{51}$$

$$v_1 = \frac{2\sqrt{51} - 5v_2}{3}$$

Upravíme druhou rovnici (umocnění je v pořádku, víme že pod odmocninou jsou vždy nezáporná čísla, netřeba psát absolutní hodnotu).

$$v_1^2 + v_2^2 = 8$$

Využijeme dosazovací metodu (máme zde druhé mocniny, bude nejpoužitelnější), do druhé rovnice dosadíme v_1 z první:

$$\left(\frac{2\sqrt{51} - 5v_2}{3} \right)^2 + v_2^2 = 8$$

$$\frac{4 \cdot 51 - 20\sqrt{51}v_2 + 25v_2^2}{9} + v_2^2 = 8$$

$$17v_2^2 - 10\sqrt{51}v_2 + 66 = 0$$

$$v_2' = \frac{5\sqrt{3} + 3}{\sqrt{17}}, \quad v_2'' = \frac{5\sqrt{3} - 3}{\sqrt{17}}$$

Dosazením obou řešení pro v_2 do vyjádření v_1 z první rovnice získáme i v_1 :

$$v_1 = \frac{2\sqrt{51} - 5}{\sqrt{17}} - 5 \left(\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{17}} \pm 3 \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$v_1' = \frac{2\sqrt{51}}{\sqrt{17}} - 15 - 25\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{17},$$

$$v_2' = \frac{2\sqrt{51}}{\sqrt{17}} + 15 - 25\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{17}$$

Zapišeme řešení:

$$\boxed{\vec{v} \in \left\{ \left[\frac{2\sqrt{51}}{\sqrt{17}} - 15 - 25\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{17}; \frac{5\sqrt{3} + 3}{\sqrt{17}} \right], \left[\frac{2\sqrt{51}}{\sqrt{17}} + 15 - 25\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{17}; \frac{5\sqrt{3} - 3}{\sqrt{17}} \right] \right\}}$$

Zaokrouhleně:

$$\vec{v} \in \left\{ [0,05; 2,83], [2,47; 1,37] \right\}$$

Příklad 2

Zadání

Určete úhel svíraný vektory $\vec{u} = (2; 1)$, $\vec{v} = (5; 7)$

Řešení

Příklad je nejjednodušší typ příkladu na skalární součin. Z rovnice

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos \alpha$$

vyjádříme úhel:

$$\alpha = \arccos \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \right)$$

neboli

$$\alpha = \arccos \left(\frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \right)$$

Dosadíme souřadnice vektorů a dostáváme:

$$\alpha = \arccos \left(\frac{17}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{74}} \right)$$

Po správném dosazení do kalkulačky (je třeba mít zapnutý režim stupňů DEG) dostáváme zaokrouhleně:

$$\boxed{\alpha = 27^\circ 54'}$$

From:

<http://wiki.gml.cz/> - GMLWiki

Permanent link:

<http://wiki.gml.cz/matematika:analytgeom:ukol1?rev=1430904803>

Last update: 06. 05. 2015, 11.33



