Písemka na opakování Analytické geometrie, Oktáva 2015/2016

Skupina A

Příklad 1

> Určete obecnou rovnici přímky *p* tak, aby byla rovnoběžná s přímkou *q: x*=1+3*k*, *y*=2+*k* a procházela bodem A[1;2].

Obecná rovnice přímky je rovnice $ax + b y + c = 0$, kde koeficienty *a* a *b* jsou dány normálovým vektorem přímky (vektorem kolmým na směr přímky), tedy $\vec{n}=(a;b)$ zadává směr přímky a koeficient *c* určuje umístění přímky v prostoru.

Přímka *p* rovnoběžná s *q* musí mít stejný směr (normálový vektor), jen jiné umístění. Přímka *q* je zadaná parametricky, máme tedy její směrový vektor, jehož složky tvoří násobky koeficientu *k*. Je tedy $\vec{s_q}=(3;1)$.

Hledáme normálový vektor, který je k $\vec{s_q}$ kolmý. Jedním z možných kolmých vektorů je $\vec{n_q}=(-1;3) $. Jelikož $p \parallel q$, musí $ \vec{n_q} = \vec{n_p}$. Dosadíme do rovnice: $-x + 3 y + c = 0$. Směr přímky je určen, umístění v prostoru určuje podmínka, že $A \in p$. Dosadíme bod A do rovnice a dopočítáme koeficient *c*. $-1 + 3 \cdot 2 + c = 0$, tedy $c=-5$.

Řešení: $p: -x + 3 y + -5 = 0$

Poznámka: bylo také možné si všimnout, že bod [1;2] leží na přímce *q*, jelikož je přímo zadaný v jejím parametrickém vyjádření, takže stačilo převést *q* do obecného tvaru, jelikož *p*=*q*.

Příklad 2

> Určete vzdálenost přímky *p*: *x*=3*k*. *y*=2−2*k* od bodu [3;2].

Přímka je zadaná parametrickou rovnicí. Existuje vzorec pro vzdálenost bodu od přímky, kde do levé strany obecné rovnice přímky dosadíme souřadnice bodu a podělíme délkou normálového vektoru přímky, z výsledku bereme absolutní hodnotu (vzdálenost nemůže být záporná).

$$d(A;p)=\frac{|a \cdot x_A + b \cdot y_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ pro } A[x_A;y_A], p: ax+by+c=0$$

Převedeme rovnici na obecnou buď sečtením tak, aby se odečetla *k*, nebo nalezením kolmého vektoru ke směrovému a dosazením bodu. Každopádně: $2x+3y-6=0$. Dosazením do vzorce získáváme, že délka je přibližně 1,66.

Kdo si nepamatuje vzorec, ví, že vzdálenost bodu od přímky je délka úsečky dané oním bodem a patou kolmice z bodu vedené k přímce. Určíme tedy kolmici *k* procházející bodem A=[3;2], například obecnou rovnicí. Jelikož směrový vektor kolmice *k* musí být kolmý na směrový vektor přímky *p* a směrový a normálový vektor téže přímky jsou na sebe kolmé, pak normálový vektor kolmice *k* může být totožný se směrovým vektorem přímky *p*. Proto $3x-2y+c=0$. Dosazením bodu A dostáváme koeficient \\c
a tedy $k: 3x-2y-5=0$.

Stejně dobře bylo možné si říci, že směrový vektor přímky *k* kolmý na směrový vektor přímky *p* je třeba (2;3) a proto parametrická rovnice kolmice je $k: x=3+2k, y=2+3k$.

Tak jako tak najdeme průsečík $k \cap p$ pomocí soustavy dvou rovnic pro přímky *p* a *k*. Bod $P=[\frac{27}{13};\frac{8}{13}]$;

Stačí určit $|AP|=\sqrt{(3-\frac{27}{13})^2+(2-\frac{8}{13})^2}\doteq1,66$

Příklad 3

Určete odchylku přímky $p: x=1-k,\ y=3-3k$ od $q: x=k,\ y=-3k$

Pro odchylku přímek využijeme odchylku jejich směrových nebo normálových vektorů. Jelikož jsou přímky obě zadané parametricky, bude výhodnější určit odchylku směrových vektorů. Potřebujeme vzorec pro skalární součin:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot cos \alpha$$

Měli bychom také vědět, jak se počítá skalární součin: $\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 $, pro vektory $\vec{u}=(u_1;u_2) \text{ a } \vec{v}=(v_1;v_2)$.

Z parametrického vyjádření víme, že $\vec{s_p}=(-1;-3), \vec{s_q}=(1;-3)$. Počítáme:

$$-1+9=\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}\cdot cos \alpha $$

$$cos \alpha = \frac{8}{10}$$

$$\alpha \doteq 36^\circ 52''$$