4. Soustavy lineárních a kvadratických rovnic

Soustava rovnic je množinou několika rovnic, které řešíme dohromady; řešením soustavy rovnic je **uspořádaná n-tice čísel\*** [*x1, x2, x3,…,xn*] z daného číselného oboru M (obvykle z reálných čísel). Tato uspořádaná n-tice čísel splňuje zároveň všechny rovnice soustavy, takže po dosazení do každé z rovnic získáme pravdivý výrok. Množina všech řešení soustavy rovnic je **průnikem** množin všech jednotlivých rovnic soustavy.

*\* případně výraz obsahující neznámou, pokud získáme na závěr rovnici s parametrem*

V případě lineárních rovnic tedy *0*, *1*, nebo *nekonečně mnoho* **řešení**, v případě kvadratických rovnic můžeme také získat 2 řešení. Existují samozřejmě také soustavy rovnic vyšších stupňů a soustavy nerovnic, pro ty bychom museli přidat pravidla pro řešení nerovnic, čímž by se nám řešení ještě více ztížilo.

Podobně jako pro jednotlivé rovnice, i pro soustavy rovnic existují ekvivalentní úpravy. Jsou jimi:

1) Ekvivalentní úprava jednotlivé rovnice (nahrazení rovnice rovnicí, která je s ní ekvivalentní)

2) Nahrazení libovolné rovnice soustavy součtem této rovnice a libovolné jiné rovnice

3) Dosazení neznámé nebo výrazu s neznámou z jedné rovnice soustavy do jiné rovnice

Tyto úpravy můžeme různě kombinovat, ale existuje několik základních metod:

1)**Sčítací metoda** – rovnice soustavy násobíme čísly zvolenými tak, aby se po sečtení vynásobených rovni jedna neznámá vyloučila.

2x + y = 7 /\*2

−3x + 2y = 7 /\*(−1)

4x + 2y = 14

3x - 2y = −7

7x + 0 = 7

x = 1

Z vypočítaného x ještě musíme vypočítat y, dosadíme jej tedy do původní verze první rovnice:

2x + y = 7

y = 7 − 2x

y =7 − 2\*1 = 5

Jediným řešením je uspořádaná dvojice [1; 5], platí tedy, že K = {[1; 5]}.

Pokud bychom chtěli ověřit náš výpočet, museli bychom, jak jsme již zmínili, dosadit všechny uspořádané dvojice (v tomto případě pouze jednu) za neznámé, a dosáhnout rovnosti ve **všech** rovnicích:

2\*1 + 5 = 7

7 = 7

L=P

−3\*1+2\*5 = 7

−3+10 = 7

L = P

2) **Dosazovací metoda** – vyjádříme jednu neznámou z jedné rovnice soustavy a dosadíme ji do ruhé rovnice, čímž se jedna neznámá z této rovnice vyloučí.

2x + y = 7

-3x + 2y = 7

y = 7 − 2x

-3x + 2(7 − 2x) = 7

-3x + 14 − 4x = 7

−7x = −7

x = 1

y = 7 − 2x

y =7 − 2\*1 = 5

K = {[1; 5]}

3) **Srovnávací metoda** – z obou rovnic vyjádříme tutéž neznámou, výsledky porovnáme a tím získáme rovnici, ve které je tato neznámá vyloučena.

2x + y = 7

-3x + 2y = 7

y = 7 − 2x

y = $\frac{3x+7}{2}$

7 − 2x = $\frac{3x+7}{2}$

14 − 4x = 3x + 7

7 = 7x

x = 1

y = 7 − 2x

y =7 − 2\*1 = 5

K = {[1; 5]}

4) **Gaussova eliminační metoda** – jedná se v podstatě o organizovanější sčítací metodu, využitelnou především v soustavě tří a více lineárních rovnic. Cílem je získat tzv. trojúhelníkový tvar, kde ve druhé rovnici je eliminována první neznámá, ve třetí rovnici první dvě neznámé atd., a v poslední rovnici jsou eliminovány všechny neznámé kromě poslední. Toho dosáhneme takto:

 1. vynásobením první rovnice tak, aby koeficient první neznámé byl jedna

 2. od následujících rovnic odečteme takové násobky upravené první rovnice, abychom z nich eliminovali 1. neznámou

 3. opakujeme první dva kroky pro další neznámé a další rovnice (první neznámou a první rovnici nahradíme druhou neznámou a druhou rovnicí, pak třetí atd.), dokud nezískáme v poslední rovnici poslední rovnici s koeficientem 1

Z trojúhelníkového tvaru získáme tedy vyjádřenou poslední neznámou, tu dosadíme do předposlední rovnice, vypočítáme předposlední neznámou, a tak jednoduše dosazujeme, doku nezískáme hodnotu

2x + y + z = 7

x + y – z = 0

−x + 2y – z = 0

Je výhodné přepsat si takto složitou soustavu do maticového tvaru:

$$\left(\begin{matrix}7\\0\\0\end{matrix}\right)\~\left(\begin{matrix}0\\7\\0\end{matrix}\right)\~\left(\begin{matrix}0\\7\\0\end{matrix}\right)\~\left(\begin{matrix}0\\-7\\0\end{matrix}\right)\~\left(\begin{matrix}0\\-7\\-21\end{matrix}\right)\~$$

$$\~\left(\begin{matrix}0\\-7\\3\end{matrix}\right)$$

Nyní již pouze dosadíme:

$$\left(\begin{matrix}3\\2\\3\end{matrix}\right)\~\left(\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\right)$$

K = {[1; 2; 3]}

Pro počet neekvivalentních lineárních rovnic *r* a počet neznámých *n* platí:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| n<r | n=r | n>r |
| Máme přebytek rovnic, zbude nám jedna neznámá na několik rovnic. Pokud by ve všech nevyšel stejný výsledek pro tuto neznámou, soustava nemá ani jedno řešení.  | Vyjde 1 nebo žádné řešení, pokud jich vyjde nekonečně mnoho pro více neznámých, měli bychom ještě v řešení zohlednit jejich vzájemný vztah pomocí parametrů.  | Jako poslední rovnici získáme rovnici s parametrem, takže i v řešení budou parametry |